COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 62/26

G. Sacerdoti: SVILUPPO IN SERIE DEGLI ELEMENTI DI MATRICE DI UN SISTEMA OTTICO COSTITUITO DA UNA SERIE DI QUADRUPOLI DISPOSTI SU UNO STESSO ASSE z CON INDICE DI CAMPO n(z).

Nota interna: n° 129
14 Aprile 1962

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

LNF-62/26

Nota interna: n° 129
14 Aprile 1962

G. Sacerdoti: SVILUPPO IN SERIE DEGLI ELEMENTI DI MATRICE DI UN SISTEMA OTTICO COSTITUITO DA UNA SERIE DI QUADRUPOLI DISPOSTI SU UNO STESSO ASSE z CON INDICE DI CAMPO n(z).

§ 1) - Calcolo dello sviluppo integrale della matrice.

Consideriamo un sistema di quadrupoli magnetici per il focheggiamento di particelle allineati su uno stesso asse z avente i piani principali **allineati** (vedi fig.1)

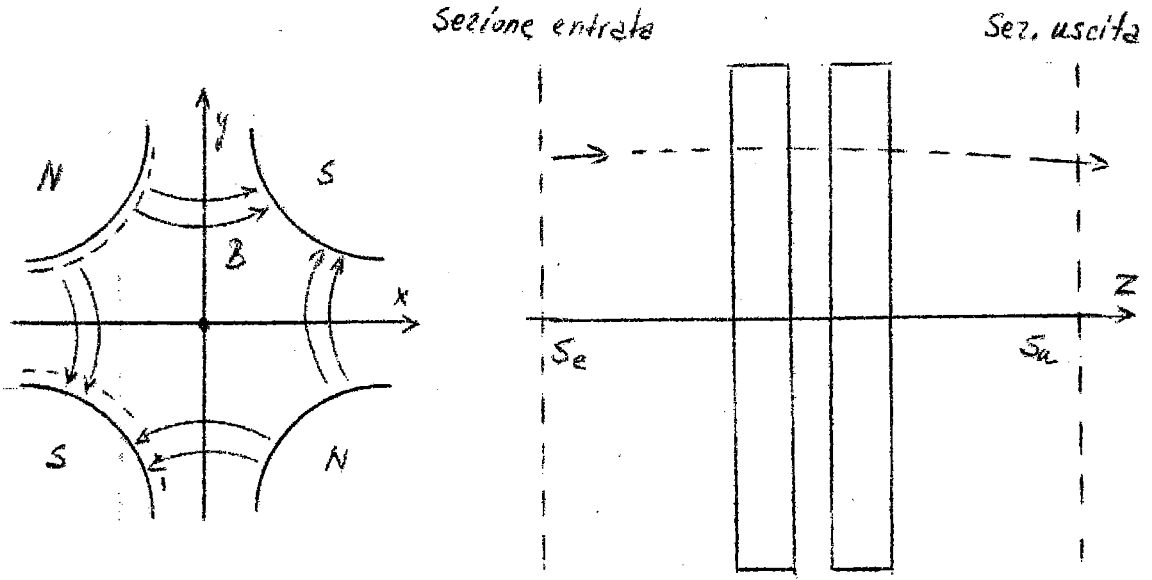

FIG. 1

Come è noto [1] [2] nell'approssimazione di Gauss si possono ricavare le y, $\frac{dy}{dz}=y'$, x, $\frac{dx}{dz}=x'$ di una particella all'uscita dal sistema ottico semplicemente mediante le relazioni 1a e 1b

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix}_u = \left| M_{TH} \right| \begin{vmatrix} x_o \\ x_o' \end{vmatrix} \qquad (1a)$$

$$\begin{vmatrix} y \\ y' \end{vmatrix}_u = \left| M_{TV} \right| \begin{vmatrix} y_o \\ y_o' \end{vmatrix} \qquad (1b)$$

Le matrici M_{TH} e M_{TV} si possono calcolare eseguendo il prodotto delle matrici dei vari quadrupoli e tratti rettilinei che si susseguono tra Su e Se. La matrice di un quadrupolo è data per il piano ove si ha convergenza

$$M_c \begin{vmatrix} \cos\beta l & \frac{1}{\beta}\sin\beta l \\ -\beta\sin\beta l & \cos\beta l \end{vmatrix} \qquad (2a)$$

ove l = lunghezza del quadrupolo in cm

$$\beta^2 = \frac{d B_y}{dx} \frac{1}{p_o} 3\times10^{-4}$$

p_o = momento particella in MeV

dB_y/dx = gradiente del campo magnetico in gauss/cm.

Per il piano ove vi è divergenza invece la matrice diventa

$$M_d \begin{vmatrix} \cosh\beta l & \frac{1}{\beta}\sinh\beta l \\ \beta\sinh\beta l & \cosh\beta l \end{vmatrix} \qquad (2b)$$

Le matrici (2a) e (2b) si possono, semplificare se il quadrupolo è lungo Δz in una matrice del tipo

$$\begin{vmatrix} 1 & \Delta z \\ \pm\beta^2 \Delta z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta z \\ n\Delta z & 1 \end{vmatrix} = M \qquad (3)$$

ove n in modulo è uguale a β^2 : è da assumersi positivo ove vi è divergenza o negativo se vi è convergenza Se abbiamo k quadrupoli molto sottili adiacenti verranno le seguenti relazioni

$$M_{TH} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta z_k \\ n_k \Delta z_k & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdots \begin{vmatrix} 1 & \Delta z_r \\ n_r \Delta z_r & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \Delta r_1 \\ n_1 \Delta r_1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (4a)$$

$$M_{TV} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta z_k \\ n_k^v \Delta z_k & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdots \begin{vmatrix} 1 & \Delta r_2 \\ n_2^v \Delta r_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \Delta r_1 \\ n_1^v \Delta r_1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (4b)$$

Il valore di $|n_K^v|$ nelle matrici per il piano verticale sarà lo stesso $|n_K|$ di quello delle matrici del piano orizzontale ma n_K^v avrà il segno cambiato rispetto a n_K. Illustriamo nelle righe che seguono un procedimento per sviluppare in serie M_{TH}; analogamente si potrà calcolare M_{TV} ove nelle formule ad $n(z_i)$ si sostituisca $-n(z_i)$.

La (4a) si può scrivere

$$\prod_1^k \left[|1| + |N_k| \Delta z_k \right] = M_{TH} \qquad (5)$$

$$|1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad N_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ n_k & 0 \end{vmatrix}$$

Nel fare il prodotto (5) ordiniamo i termini secondo quest'ordine:

- M_o - i termini in cui non compare alcun fattore N_i. Questo termine risulterà dal prodotto delle matrici unitarie e sarà pari a

$$M_0 = \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| \tag{6}$$

- M_1 - i termini in cui compare un solo fattore N_i. Questi termini saranno in numero di k e saranno dati da

$$M_1 = \sum N_i \Delta r_i = \int_{x_e}^{x_u} N(z_i)\, dz_i \tag{7}$$

- M_2 - i termini in cui compaiono il fattore $N_i N_\gamma$. $(\gamma \neq i)$ Saranno K(K-1) termini. Questo termine è facilmente esprimibile se lo scriveremo cosi'

$$\begin{aligned} M_2 = {} & N_K \Delta z_K \sum_{i=1}^{k-1} N_i \Delta z_i + \\ & + N_{k-1} \Delta z_{k-1} \sum_{i=1}^{k-2} N_i \Delta z_i + \\ & \ldots\ldots \\ & + N_2 \Delta z_2 \sum_{i=1}^{1} N_1 \Delta z_1 \end{aligned} \tag{8}$$

E' facile vedere che la (8) è effettivamente la M_2 perchè vi si ritrovano tutti i termini del prodotto ove compaiono fattori del tipo $N_i N_\gamma$ (N solo due volte). La (8), passando al limite, si può scrivere

$$M_2 = \int_{x_e}^{x_u} N(z_2)\, dz_2 \int_{x_e}^{x_2} N(z_1)\, dz_1 \tag{9}$$

Analogamente possiamo scrivere

$$M_K = \int_{x_e}^{x_k} N(z_K)\, dz_K \int_{x_e}^{z_k} N(z_{K-1})\, dz_{K-1} \cdots \int_{x_e}^{x_2} N(z_1)\, dz_1 \tag{10}$$

Per cui possiamo scrivere

$$M_{TH} = \sum_{0}^{\infty} M_i \tag{11}$$

§ 2) - Calcolo degli elementi della matrice.

Passiamo ora al calcolo degli elementi della matrice. Indichiamo questi elementi con m_{11} m_{12} m_{21} m_{22}.

Potremo scrivere

$$m_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} m_{ij}^{k} \tag{12}$$

ove m_{ij}^{k} è l'elemento ij esimo della matrice K.

Cominciano il calcolo per K = 0

per $k=0$ $\quad m_{11}^{0} = 1 \qquad m_{12} = 0 \qquad m_{21} = 0 \qquad m_{22} = 1$

per $k=1$ $\quad m_{11}^{1} = 0 \qquad m_{12} = \int_{x_e}^{x_u} dx \qquad m_{21} = \int_{x_e}^{x_u} n\,dx \qquad m_{22} = 0$

per $k=2$ $\quad m_{11}^{2} = \int_{x_e}^{x_u} dx \int_{x_e}^{x_u} n\,dx \qquad m_{12} = 0 \qquad m_{21} = 0 \qquad m_{22} = \int_{x_e}^{x_u} n\,dx \int_{x_e}^{x_u} dx$

per $k=3$ $\quad m_{11}^{3} = 0 \qquad m_{12} = \int_{x_e}^{x_u} dx \int_{x_e}^{x_u} n\,dx \int_{x_e}^{x_u} dx \qquad m_{21} = \int_{x_e}^{x_u} n\,dx \int_{x_e}^{x_u} dx \int_{x_e}^{x_u} n\,dx \qquad m_{22} = 0$

Senza proseguire nel calcolo possiamo già da questi primi termini ricavare la formula generale

$$\begin{aligned} m_{11} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int [x, n]^{k} \\ m_{12} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int x\,[n, x]^{k} \\ m_{21} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int n\,[x, n]^{k} \\ m_{22} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int [n, x]^{k} \end{aligned} \tag{13}$$

ove i simboli hanno il seguente evidente significato

$$\int x[n,x]^k = \int_{x_e}^{x_4} dx_{2k} \int_{x_e}^{x_{2k}} n\,dx \int_{x_e}^{x_3} dx_2 \int_{x_e}^{x_2} n(x)\,dx \int_{x_e}^{x_1} dx_0 \tag{14a}$$

$$\int (n,x)^k = \int_{x_e}^{x_4} n(x_{2k-1})\,dx_{2k-1} \int_{x_e}^{x_{2k-1}} dx_{2k-2} \int_{x_e}^{x_3} dx_2 \int_{x_e}^{x_2} n(x_1)\,dx \int_{x_e}^{x_1} dx_0 \tag{14b}$$

(per $k=0$ eccezionalmente $\int_{x_e}^{x_4}(n,x)^k = \int_{x_e}^{x_4}(x,n)^k = 1$)

Esempio numerico.

A titolo di esempio calcoliamo i termini (13) nel caso più semplice e cioè quando n = cost. In tale caso come è noto m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} sono dati da

$$\cosh, \frac{\sinh}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}\sinh, \cosh$$

Infatti otterremo dalle (13)

$K=$	0	1	2	3	4	... etc
m_{11}	1	$\frac{nl^2}{2!}$	$\frac{n^2l^4}{4!}$	. . . .	. .	
m_{12}	l	$\frac{nl^3}{3!}$	$\frac{n^2l^5}{5!}$			
m_{21}	nl	$\frac{n^2l^3}{3!}$	$\frac{n^3l^5}{5!}$			
m_{22}	1	$\frac{nl^2}{2!}$	$\frac{n^2l^4}{4!}$			

ove l = lunghezza quadrupolo.

Si vede cosi subito che

$m_{11} = \cosh \sqrt{n}\,l$

$m_{12} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sinh \sqrt{n}\,l$

$m_{21} = \sqrt{n} \sinh \sqrt{n}\,l$

$m_{22} = \cosh \sqrt{n}\,l$

e che i termini m_{ij}^{k} sono i K esimi termini dello sviluppo dei coefficienti mij in serie di potenza di l.

Abbiamo inoltre calcolato per un sistema ottico di lunghezza unitaria L = 1 e con n = a + bx i primi 5 termini dello sviluppo in serie degli elementi di matrice. In tabella I sono riportati i risultati ottenuti.

Per controllare l'approssimazione del risultato in forma indicativa si può calcolare AB - CD - 1 = ε .

Se ε è molto $\neq 0$ l'approssimazione è ovviamente di sicuro scarsa.

Conclusioni.

L'utilità del metodo consiste nel fatto che per funzioni semplici di n(z) la serie data da $\sum_{k=0}^{\infty} m_{ij}^{k}$ è rapidamente convergente e quindi si può semplicemente programmare alla macchina calcolatrice il calcolo dei coefficienti perchè ci si può limitare al calcolo di pochi termini (3 ÷ 5) del loro sviluppo in serie. Sono attualmente in corso calcoli relativi a sistemi semplici da parte dell'Ing. Uccelli del gruppo di Pisa - I.N.F.N.

Bibliografia

1 - P.G. Sona; Ottica degli analizzatori magnetici ..... Laboratori Nazionali di Frascati, LNF 58/11 (15.9.58).

2 - Edwards, Rose: An extention of the transfer matrix etc.: Nuclear Instr. and Methods (1960).

TABELLA I

Tabella riassuntiva dei primi termini dello sviluppo in serie della matrice M di trasferimento di un sistema di lenti quadrupolari lungo L = 1 aventi

$$n = a + bx \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$M = \begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix}$$

$$A_0 = 1 \qquad A_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{6}$$

$$A_2 = \frac{a^2}{4!} + 4\frac{ab}{5!} + \frac{4}{6!}b^2$$

$$A_3 = \frac{a^3}{6!} + 9\frac{a^2b}{7!} + 28\frac{ab^2}{8!} + 28\frac{b^3}{9!}$$

$$A_4 = \frac{a^4}{8!} + 16\frac{a^3b}{9!} + 100\frac{a^2b^2}{10!} + \frac{280}{11!}ab^3 + 280\frac{b^4}{12!}$$

$$A_5 = \frac{a^5}{10!} + 25\frac{a^4b}{11!} + 260\frac{a^3b^2}{12!} + 1380\frac{a^2b^3}{13!} + 3640\frac{ab^4}{14!} + 3640\frac{b^2}{15!}$$

$$B_0 = 1 \qquad B_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} \qquad B_2 = \frac{a^2}{4!} + \frac{6ab}{5!} + 10\frac{b^2}{6!}$$

$$B_3 = \frac{a^3}{6!} + \frac{12a^2b}{7!} + 52\frac{ab^2}{8!} + 80\frac{b^3}{9!}$$

$$B_4 = \frac{a^4}{8!} + 20\frac{a^3b}{9!} + 160\frac{a^2b^2}{10!} + 320\frac{ab^3}{11!} + 880\frac{b^2}{12!}$$

$$B_5 = \frac{a^5}{10!} + 30\frac{a^4b}{11!} + 369\frac{a^3b^2}{12!} + 2412\frac{a^2b^3}{13!} + 7680\frac{ab^4}{14!} + 12320\frac{b^5}{15!}$$

$$C_0 = 1 \qquad C_1 = \frac{a}{3!} + \frac{2b}{4!} \qquad C_2 = \frac{a^2}{5!} + \frac{6ab}{6!} + \frac{10b^2}{7!}$$

$$C_3 = \frac{a^3}{7!} + \frac{12a^2b}{8!} + ab^2\frac{52}{9!} + \frac{80b^3}{10!}$$

$$C_4 = \frac{a^4}{9!} + \frac{a^3b}{10!}20 + 160\frac{a^2b^2}{11!} + \frac{320}{12!}ab^3 + \frac{b^4}{13!}880$$

$$C_5 = \frac{a^5}{11!} + \frac{a^4b}{12!}30 + \frac{a^3b^2}{13!}369 + \frac{a^2b^3}{14!}2412 + \frac{ab^4}{15!}7680 + \frac{b^5}{16!}12320$$

$$D_0 = 0 \qquad D_1 = a + \frac{b}{2} \qquad D_2 = \frac{a^2}{3!} + \frac{4ab}{4!} + \frac{4b^2}{5!}$$

$$D_3 = \frac{a^3}{5!} + \frac{9a^2b}{6!} + 28\frac{ab^2}{7!} + \frac{28b^3}{8!}$$

$$D_4 = \frac{a^4}{7!} + \frac{a^3b}{8!}16 + 100\frac{a^2b^2}{9!} + 280\frac{ab^3}{10!} + 280\frac{b^4}{11!}$$

$$D_5 = \frac{a^5}{9!} + \frac{a^4b}{10!}25 + 260\frac{a^3b^2}{11!} + 1380\frac{a^2b^3}{12!} + \frac{ab^4}{13!}3640 + \frac{b^5}{14!}3640$$